数理解析研究所講究録
642巻 1988年 180-197

SL(3,$\mathbb{R}$)の一様有界表現について

広大総科　江口　正晃　(Masaaki Eguchi)
広大総科　小泉　伸　(Shin Koizumi)
広大理　田中　祥平　(Shohei Tanaka)

§1. Introduction.

Gを noncompact connected real semisimple Lie group with finite center. θを Cartan involution. $G=KAN$を岩沢分解. $\mathfrak{a}$をAの Lie algebra. $P=MAN$をGの minimal parabolic subgroup $\pi_{\sigma,\nu} \equiv \operatorname{ind}_{P\uparrow G} \sigma\otimes\nu\otimes 1$ $(\sigma\in\hat{M},\ \nu\in\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$. Ωを$\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*\subset\Omega\subset\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ $w\Omega\subset\Omega$ $(\forall w\in W\equiv M'/M)$を満たす domain とするとき. 以下のようなGの一様有界表現を構成することを考える。

$$R:\ G\times\hat{M}\times\Omega \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(\bar{N}))$$
$$(g,\ \sigma,\ \nu)\longmapsto R(g,\sigma,\nu)$$

($\bar{N}\equiv\theta N$., $\mathcal{B}(L^2(\bar{N}))$は$L^2(\bar{N})$の bounded linear operator 全体)

s.t.

1) $g\in G$, $\sigma\in\hat{M}$ fixed.

$$\nu \longrightarrow R(g,\sigma,\nu)$$

holomorphic in Ω

2). $\nu\in\Omega$, $\sigma\in\hat{M}$ fixed.

$$g \longrightarrow R(g,\sigma,\nu)$$

は、Gの表現になっていて、さらに、

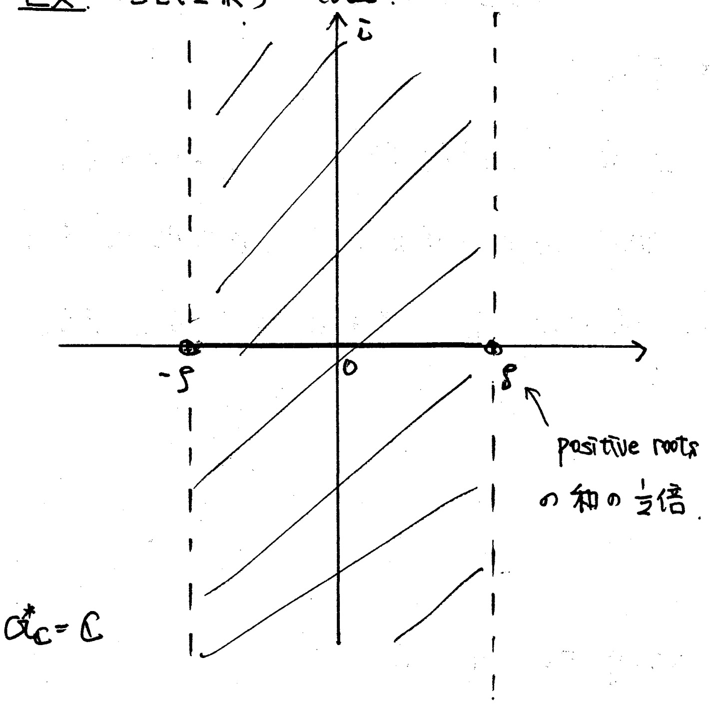
$$\| R(g,\sigma,\nu)\|_\infty \leq C_{\sigma,\nu} \quad \text{for all } g\in G$$

$C_{\sigma,\nu}$ は σ, ν に depend する定数.

3) $R(g, w\sigma, \sigma\nu) = R(g,\sigma,\nu)$ for all $w\in W$.

4) $R(\cdot,\sigma,\nu)\cong \pi_{\sigma,\nu}$ $\nu\in\sqrt{-1}\,\mathfrak{a}^*$

Ex. $SL(2\,\mathbb{R})$ Case.



$SL(2\,\mathbb{R})$の場合、Rの上の定式化は少し不十分で、実際 $\hat{M}$ を $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ に置きかえて成立する。($(0,0)$はMのtrivial表現に対応する)。その際、Ωは、左の図の斜線部の領域になり特に $R(g,(0,0),\nu)$ ($\nu\in\mathfrak{a}^*$のΩ)は補系列と同型になることが知られている。

Rの構成については、Kunze－Steinが、$G=SL(2,\mathbb{R})$ $SL(n,\mathbb{C})$ $O(2n+1,\mathbb{C})$ $Sp(n,\mathbb{C})$, $O(2n,\mathbb{C})$について、Sallyが、$SL(2,\mathbb{R})$のUniversal covering groupについて、Lispmanが、$SO_e(n+1,1)$で、$\sigma=1$のcaseについて、さらにWilson、Bamazi が、それぞれ独自に、Mellin変換を用いて、Lispmanと同じCaseを、Bregaが、Wilsonの方法を使って、$SO_e(n+1,1)$のσが、$w\sigma=\sigma$ $({}^\forall w\in W)$を満たす場合について、十分条件を、さらにStankeが、$SU(n+1,1)$で$\sigma=1$のcaseについて、なされている。ここでは、real rankとCartan subalgebraのconjugacy classが、ともに1でない例として、$SL(3,\mathbb{R})$の場合について、Kunze－Steinの$SL(n,\mathbb{C})$の場合の方法とanalogousな方法で、Rが、構成できることを示す。

(注)．Bregaの結果からΩは、σに依存することが、わかっている(上の他のCaseでは問題ない)．従って Ex も含めて、Rの定式化は不十分であるが、我々が、述べることに関しては、上の定式化で、十分である。

§ 2. Notation

$G=SL(3,\mathbb{R})$

$P=MAN$ minimal p.s.g.p. of G

i.e.

$$M=\left\{\begin{pmatrix}x_1&&\\&x_2&\\&&x_3\end{pmatrix}\;\middle|\; x_1x_2x_3=1 \quad x_j=\pm 1\right\}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} \in SL(3,\mathbb{R}) \;\middle|\; a_j > 0 \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \in SL(3,\mathbb{R}) \right\}$$

$$V = \overline{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ * & 1 & \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \in SL(3,\mathbb{R}) \right\}$$

とする。$\widehat{M}$ の元は、

$$\sigma_{(m_1 m_2 m_3)}\left(\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3}$$

where $\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_3 \end{pmatrix} \in M$

$m_i \geqq 0,\ 0 \leqq m_1 + m_2 + m_3 \leqq 1$

と表わされる。

以下 $\widehat{M}$ を $\{(m_1 m_2 m_3) \mid 0 \leqq m_1 + m_2 + m_3 \leqq 1 \quad m_i \geqq 0\}$ と同一視する。

$\sigma = \sigma_{(m_1 m_2 m_3)} \in \widehat{M}$ $\quad \nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ において、$\mathrm{ind}_P^G\, \sigma \otimes \nu \otimes 1$ を以下のように定める。

$$(\pi_{\sigma,\nu}(g) f)(v) = e^{(\rho+\nu)(H(vg))}\, \sigma(m(vg))\, f(\overline{n}(vg))$$

$$g \in G,\quad v \in V,\qquad g = n(g) \exp H(g)\, m(g)\, \overline{n}(g) \qquad f \in C_0^\infty(V)$$

$$\begin{array}{rcl} \psi : \{(s_1 s_2 s_3) \in \mathbb{C}^3 \mid s_1 + s_2 + s_3 = 0\} & \longrightarrow & \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \\ (s_1 s_2 s_3) & \longmapsto & s_1\alpha_1 + (s_1+s_2)\alpha_2 \end{array}$$

α_1, α_2 は simple root

とおくと．ψ は．linear iso.

さらに．

$$C \equiv MA = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & c_2 & \\ & & c_3 \end{pmatrix} \in SL(3\,\mathbb{R}) \right\}$$

とし．

$$\lambda(c) \equiv \prod_{j=1}^{3} (\operatorname{sgn} c_j)^{m_j} |c_j|^{s_j} \qquad c \in C \quad (m_1\, m_2\, m_3) \in \hat{M}$$
$$s_j \in \mathbb{C} \quad s_1 + s_2 + s_3 = 0$$

$$\lambda(g) \equiv \lambda(\exp H(g)\, m(g)) \qquad g \in G$$

$$\mu(g) \equiv e^{2\rho(H(g))} \qquad g \in G \qquad \rho = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

α_i possitive roots.

とする．以下 $\lambda = (m_1\, m_2\, m_3 : s_1\, s_2\, s_3)$ とも表わすことにする．

$f \in L^2(V)$ に対して $\left(\text{i.e. } \int_V |f(v)|^2\, dv < \infty \right)$

$$(T(g,\lambda)f)(v) \equiv \mu^{\frac{1}{2}}(vg)\lambda(vg)f(\bar{n}(vg)) \qquad g \in G \quad v \in V$$

とすると．

$$\pi_{\sigma,\nu} = T(\cdot\,.\lambda)$$

where $\psi(\nu) = (s_1, s_2\, s_3)$

となる。

$P_j \equiv S_{\alpha_j} \in W\left(\equiv M'/M\right)$ （S_j は α_j に関する reflection）

$\bar{\mathfrak{n}} = \bar{\mathfrak{n}}_{P_j} + \bar{\mathfrak{n}}'_j$ ， $\bar{N} = \bar{N}_{P_j} \cdot \bar{N}'$ semi direct

とする。

lemma 1

$x \in \overline{N}_{P_j}$ において　　　$(j=1,2)$

∘ $\lambda(xP_j) = (\operatorname{sgn} x_{j+1,j})^{m_j+m_{j+1}} |x_{j+1,j}|^{s_{j+1}-s_j}$

∘ $\mu^{\frac{1}{2}}(xP_j) = |x_{j+1,j}|^{-1}$

但し. $x_{j+1,j}$ は. x の $(j+1,j)$-成分.

§3. The operators $A(P_j,\lambda)$.

$A(P_j,\lambda)$ $(j=1,2)$ を $L^2(V)$ 上の operator として形式的に以下のように定める。

$$(A(P_j,\lambda)f)(v) = \frac{1}{\gamma_j(\lambda)}\int_{\overline{N}_{P_j}} \lambda^{-1}(xP_j)\mu^{\frac{1}{2}}(xP_j)f(x^{-1}v)\,dx .$$

$$\gamma_j(\lambda) = \gamma(m_j+m_{j+1},\ s_j-s_{j+1}) \qquad (j=1,2),\ f\in C_0^\infty(V)$$

但し.
$$\gamma(m,s) = 2^s i^{|m|}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s+|m|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{|m|+1-s}{2}\right)}$$

$$(s\in\mathbb{C},\quad m=0,1)$$

$m=m_j+m_{j+1}$, $s=s_j-s_{j+1}$ とし. $x\in\overline{N}_{P_j}$, $v\in V$ の $(j+1,j)$-成分をそれぞれ. $x_{j+1,j}$ $v_{j+1,j}$ とすると lemma 1 より.

$$A(P_j\, m\, s) = \frac{1}{\gamma(m,s)}\int_{\mathbb{R}} (\operatorname{sgn} x_{j+1,j})^{m} |x_{j+1,j}|^{-1+s} f(v_{j+1,j}-x_{j+1,j})\,dx \quad (j=1,2)$$

と表わされる。

<u>lemma 2</u>　$m=0,1$, $s\in\mathbb{C}$　$0<Re(s)<\frac{1}{2}$, $f\in C_0^\infty(V)$ において.

(1). $A(P_j\ m\ s)f(v)$ is absolute convergent for all $v\in V$.

(2) $A(P_j\ m\ s)f\in L^2(V)$.

(3) $s\longrightarrow A(P_j\ m\ s)f$ は. $0\leqq Re(s)<\frac{1}{2}$ 上の $L^2(V)$-valued conti function として一意的に拡張できる.

(4) $Re(s)=0$ のとき. $A(P_j\ m\ s)$ は. $L^2(V)$ 上の unitary operator として.定義できる.

(5) $Re(s_1)=Re(s_2)=0$　$s_1,s_2\in\mathbb{C}$ において.

$$A(P_j\ m_1\ s_1)A(P_j\ m_2\ s_2)=A(P_j\ \widetilde{m_1+m_2}\ ,\ s_1+s_2)$$

但し. $m_1\ m_2=0,1$ で. $\sim$ は. 2の modulo

(6). $A(P_j\ 0\ 0)=$ identity operator.

<u>lemma 3</u>　$j=1,2$

$$A(P_j,\lambda)T(g,\lambda)=T(g,P_j\lambda)A(P_j\ \lambda)\qquad\text{for all } g\in G$$

<u>lemma 4</u>　$A(P_2\ m\ s)A(P_1\ m\ s)$　$(Re(s)=0\quad m=0,1)$ form a commutative family.

<u>lemma 5</u>　$m=0,1$　$Re(s)=0$　$s\in\mathbb{C}$.　$c\in C(=MA)$ において.

$$A(P_j\ m\ s)T(c,\lambda)=\mathrm{sgn}\left(\frac{c_j}{c_{j+1}}\right)^m\left|\frac{c_j}{c_{j+1}}\right|^{-s}T(c,\lambda)A(P_j\ m\ s)$$

<u>lemma 6</u>　$m=0,1$　$Re(s)=0$　$s\in\mathbb{C}$ において.

$$M(P_j\ m\ s)f(v)\equiv(\mathrm{sgn}\,v_{j+1\,j})^m|v_{j+1,j}|^{-s}f(v)\qquad f\in C_0^\infty(V)$$

$$T(P_j\ m\ s)\equiv M(P_j,m,s)T(P_j\ \varepsilon)\qquad P_j\in W$$

where $T(P_j, \varepsilon)$ is the operator of the principal series corresponding to P_j, ε (ε is identity character)

$\Rightarrow$

1) $A(P_j\ m\ s)T(P_j\ m\ s) = T(P_j\ m\ s)A(P_j\ m\ s) \quad (j=1,2)$

2) $A(P_j\ m\ s)T(P_k\ m', s') = T(P_k\ \widetilde{m+m'}, s+s')A(P_j\ m\ s) \quad (k \neq j)$

§4. Construction of $R(g\ \lambda)$ in the unitary case

$J(2\ m\ s) \rightleftarrows A(P_2\ m\ s)$, $J(1\ m\ s) \rightleftarrows A(P_2\ m\ s)A(P_1\ m\ s)$

($m=0,1$. $s \in \mathbb{C}$ $\mathrm{Re}(s)=0$) とおく

<u>Theorem 1</u> $G = SL(3\ \mathbb{R})$

λ; continuous unitary character of C

i.e. $\lambda = (m_1\ m_2\ m_3\ ;\ s_1\ s_2\ s_3)$ $\mathrm{Re}(s_i)=0$ $(m_1\ m_2\ m_3) \in \hat{M}$

$$G_0 = \{ a \in G \mid a_{j3} = 0 \quad 1 \leqq j \leqq 2 \} \left(= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in G \right\} \right)$$

$R(g, \lambda) \rightleftarrows W(\lambda)T(g\ \lambda)W(\lambda)^{-1}$ where $W(\lambda) = J(1\ m_1\ s_1)J(2\ m_2\ s_2)$ $g \in G$

とすると.

1). $R(g, \lambda) = R(g, \mathrm{res}\lambda) = T(g, \mathrm{res}\lambda)$ for all $g \in G_0$

但し. $\mathrm{res}\,\lambda = (0, 0, m_1+m_2+m_3\ ;\ 0, 0, 0)$

2) $R(g\ P\lambda) = R(g\ \lambda)$ for $\forall g \in G$ $\forall P \in W$.

(注) 上の構成から. 明らかに $R(\cdot, \lambda) \cong T(\cdot, \lambda)$ である。

(証明).

1). $\overline{P} = MA\overline{N}$ とすると. $G_0 = \overline{P}P_1\overline{P} \cup \overline{P}$ 故に $G = G_0 \cup G_0 P_2 G_0$

従って. $g \in \overline{N}(=V)$, $g \in C$, $g = P_1$ のときに主張を示せばよい. $g \in V$ とすると

$\lambda(vg)\mu^{\frac{1}{2}}(vg) = 1$ より $T(g,\lambda) = T(g,\lambda')$ 従って $A(P_g\, m\, s)$ と $T(g\,\lambda)$

は可換. 従って $J(k, m\, s)$ と $T(g\,\lambda)$ も可換. 故に. $R(g,\lambda) = T(g\,\lambda)$.

$g = c \in C$ のとき. $\lambda = (m_1\, m_2\, m_3\; s_1\, s_2\, s_3)$ とすると

$$\lambda(c) = \prod_{k=1}^{2} \left(\operatorname{sgn} \frac{c_k}{c_{k+1}}\right)^{\alpha_k} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|^{\beta_k} \operatorname{res}\lambda(c) \qquad \begin{aligned}\alpha_k &= m_1 + \cdots + m_k \\ \beta_k &= s_1 + \cdots + s_k\end{aligned}$$

と表わせ. lemma 5 より.

$$W(\lambda)T(c,\lambda)W(\lambda)^{-1} = \frac{\operatorname{res}\lambda(c)}{\lambda(c)} T(c,\lambda)$$

故に

$$W(\lambda)T(c,\lambda)W(\lambda)^{-1} = T(c, \operatorname{res}\lambda)$$

$$\therefore \quad R(c\,\lambda) = R(c, \operatorname{res}\lambda) = T(c, \operatorname{res}\lambda)$$

$g = P_1$ のとき. $T(P_1\ \operatorname{res}\lambda) = T(P_1\ \varepsilon)$ (ε は identity character) 従って

$W(\lambda)T(P_1\,\lambda) = T(P_1\,\varepsilon)W(\lambda)$ を示せばよい。 $\lambda = (m_1\, m_2\, m_3\,;\, s_1\, s_2\, s_3)$

とすると. $T(P_1\ \lambda) = T(P_1\ m_1 + m_2, s_1 - s_2)$ となり. lemma 6 より.

$$J(2\ m_2\ s_2)T(P_1\ \lambda) = T(P_1\ m_1\ s_1)J(2\ m_2\ s_2)$$

$$J(1\ m_1\ s_1)T(P_1\ m_1 s_1) = T(P_1\ \varepsilon)J(1\ m_1\ s_1)$$

よって $W(\lambda)T(P_1\,\lambda) = T(P_1\,\varepsilon)W(\lambda)$ を得る.

2). $R(g\ \lambda) = R(g.\,P\lambda)$ $P \in W$ とすると.

$$W(\lambda)T(g,\lambda)W(\lambda)^{-1} = W(P\lambda)T(g,P\lambda)W(P\lambda)^{-1}$$

$$\therefore \quad W(P\lambda)^{-1}W(\lambda)T(g\,\lambda) = W(P\lambda)T(g\ P\lambda)W(P\lambda)^{-1} \quad \text{for } {}^\forall g \in G.$$

よって　$W(P\lambda)^{-1}W(\lambda) = A(P\lambda)$ であることを示せばよい．

$W(P_1\lambda)A(P_1\lambda)$

$= J(1, P_1\lambda)J(2, P_1\lambda)A(P_1\lambda)$

$= J(1\ m_2\ s_2)J(2\ m_1\ s_1)A(P_1\lambda)$

$= A(P_2\ m_2\ s_2)A(P_1\ m_2\ s_2)A(P_2\ m_1\ s_1)A(P_1\ m_1+m_2\ s_1-s_2)$

$= A(P_2\ m_1\ s_1)A(P_1\ m_1\ s_1)A(P_2\ m_2\ s_2)$　　(∵ lemm 4)

$= W(\lambda)$

$W(P_2\lambda)A(P_2\lambda)$

$= J(1, P_2\lambda)J(2\ P_2\lambda)A(P_2\lambda)$

$= J(1\ m_1 s_1)J(2\ m_3\ s_3)A(P_2\lambda)$

$= A(P_2\ m_1\ s_1)A(P_1\ m_1\ s_1)A(P_2\ m_3\ s_3)A(P_2\ m_2+m_3\ s_2-s_3)$

$= A(P_2\ m_1\ s_1)A(P_1\ m_1 s_1)A(P_2\ m_2\ s_2)$　　(∵ lemma 4)

$= W(\lambda)$

q.e.d.

§5. Analytic continuation of $R(P\lambda)$.

$\Lambda^* \equiv \{ \lambda = (m_1\ m_2\ m_3 ; s_1\ s_2\ s_3) \mid (m_1\ m_2\ m_3) \in \widehat{M}\ \ (s_1\ s_2\ s_3) \in \tilde{\mathcal{I}} \}$

$\tilde{\mathcal{I}}$; $(a, -a, 0)$ $(0 \leq a \leq \frac{1}{2})$ を Weyl group で動かした元で張られる hyper surface $s_1+s_2+s_3=0$ 上の convex hull

$+ \sqrt{-1}\,\mathfrak{a}^*$

$\Lambda \equiv \{ \lambda = (m_1\, m_2\, m_3\,;\, s_1\, s_2\, s_3) \mid (m_1\, m_2\, m_3) \in \hat{M} \quad \mathrm{Re}(s_j) = 0 \ (j = 1 \sim 3) \}$

とする.

<u>*lemma* 7</u>　$P = P_2$　$\mathrm{Re}(s) = 0$　$s \in \mathbb{C}$　$\lambda = (m_1\, m_2\, m_3\,;\, \sqrt{-1}\, b_1, \sqrt{-1}\, b_2, \sqrt{-1}\, b_3) \in \Lambda$

$Q(\lambda, s) \equiv R(P, m_1\, m_2\, m_3\; \sqrt{-1}\, b_1\; \sqrt{-1}\, b_2 + s, \sqrt{-1}\, b_3 - s)$ とすると.

the operator $Q(\lambda, s)$ can be continued into the strip $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$

such that.

1). for each $f, g \in L^2(V)$

$$s \longrightarrow (Q(\lambda\, s) f, g) \text{ is analytic in } -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$$

2) $\| Q(\lambda\, s) \| \leq K_a \left(3 + \sum_{j=1}^{3} |b_j| + |b| \right)^3$　($\| \ \|$ は operator norm)

但し $s = a + ib$, $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ で. K_a は. a に依存した定数

(証明)

$\lambda \in \Lambda$ において.

$T_1(P\, \lambda) \equiv J(2\; m_2\; s_2)\, T(P\, \lambda)\, J(2\; m_2\; s_2)^{-1}$

$Q_1(\lambda\; s) \equiv T_1(P,\, m_1\, m_2\, m_3\;;\; \sqrt{-1}\, b_1, \sqrt{-1}\, b_2 + s,\; \sqrt{-1}\, b_3 - s)$　$(\mathrm{Re}(s) = 0)$

とおくと.　$R(P\, \lambda) = W(\lambda)\, T(P\, \lambda)\, W(\lambda)^{-1}$　$(W(\lambda) = J(1\; m_1\, s_1)\, J(2\; m_2\; s_2))$

より.

$$R(P\, \lambda) = J(1\; m_1\, s_1)\, T_1(P\, \lambda)\, J(1\; m_1\, s_1)^{-1}$$

$$Q(\lambda, s) = J(1\; m_1\, s_1)\, Q_1(\lambda\; s)\, J(1\; m_1\, s_1)^{-1} \quad (\mathrm{Re}(s) = 0)$$

となる. $J_1(1\; m_1\, s_1)$ は. s に依存しないこと及び. ユニタリ作用素であること

から. $Q_1(\lambda, s)$ について. *lemma* の主張を示せばよい.

$T(P\, \lambda) = T(P,\; m_2 + m_3,\; \sqrt{-1}\, b_2 - \sqrt{-1}\, b_3)$

$$= M(P,\ m_3, -\sqrt{-1}\,b_3)\,T(P\ m_2\ i b_2)$$

但し. $M(P, m, s)f(v) \fallingdotseq (\mathrm{sgn}\, v_{32})^m |v_{32}|^{-s} f(v)$

となり. $m = m_2$　$b = b_2$　$m' = m_2 + m_3$　$b' = -b_2 - b_3$　とおくと.

$$T(P\ \lambda) = M(P,\ \widetilde{m+m'},\ \sqrt{-1}\,b + \sqrt{-1}\,b')\,T(P\ m\ \sqrt{-1}\,b)$$

$$\therefore\ T_1(P, \lambda) = A(P\ m\ \sqrt{-1}\,b)\,M(P,\ \widetilde{m+m'}, \sqrt{-1}\,b + \sqrt{-1}\,b')\,T(P, m, \sqrt{-1}\,b)\,A(P, m, -\sqrt{-1}\,b)$$

一方

$$T(P, m, \sqrt{-1}\,b)\,A(P, m, \sqrt{-1}\,b)$$

$$= A(P, m, -\sqrt{-1}\,b)\,T(P, m, \sqrt{-1}\,b)$$

$$= A(P, m, -\sqrt{-1}\,b)\,M(P, m, -\sqrt{-1}\,b)\,T(P, \varepsilon)$$

$$L(m, m', \sqrt{-1}\,b, \sqrt{-1}\,b')$$

$$\fallingdotseq A(P, m, \sqrt{-1}\,b)\,M(P,\ \widetilde{m+m'}, \sqrt{-1}\,b + \sqrt{-1}\,b')\,A(P, m, -\sqrt{-1}\,b)\,M(P, m, -\sqrt{-1}\,b)$$

とすると

$$\therefore\ T_1(P, \lambda) = L(m, m', \sqrt{-1}\,b, \sqrt{-1}\,b')\,T(P, \varepsilon)$$

$$\therefore\ Q_1(\lambda, S) = L(m, m', \sqrt{-1}\,b + s, \sqrt{-1}\,b')\,T(P, \varepsilon)$$

となる. さらに.

$$(*)\left[\begin{array}{l} f \in L_2(V) = L_2(\overline{N}_{P_2} \times \overline{N}_2')\ \ \text{s.t.}\ \ f(z, z') = g(z)\,h(z') \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z \in \overline{N}_{P_2}\quad z' \in \overline{N}_2' \end{array}\right.$$

とすると.

$$L(m, m', \sqrt{-1}\,b_2, \sqrt{-1}\,b')\,f(z, z') = E(m, m'; \sqrt{-1}\,b_2, \sqrt{-1}\,b')\,g(z)\,h(z)$$

但し. $E(m, m', \sqrt{-1}\,b_2, \sqrt{-1}\,b') = A(m\,s)\,B(m+m', \sqrt{-1}\,b_2 + \sqrt{-1}\,b')\,A(m, \sqrt{-1}\,b_2)\,B(m, -\sqrt{-1}\,b_2)$

となる。

$E(m, m', \sqrt{-1}b_2+s, \sqrt{-1}b')$ は $-\frac{1}{2} < Re(s) < \frac{1}{2}$ まで正則に拡張でき、

さらに $\| E(m, m', \sqrt{-1}b+s, \sqrt{-1}b') \| \leqq K_a(3+|b_2|+|b|+|b'|)^3$

$$s = a + \sqrt{-1}b \quad -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

(*)のような f の集合が $L^2(V)$ で dense であること、及び $T(P, \varepsilon)$ が unitary であることより、$Q_1(\lambda, s)$ に対しても同じ situation が成り立つ

i.e. $\| Q_1(\lambda, s) \| \leqq K_a(3+|b_2|+|b|+|b'|)^3$

$$\leqq 2K_a\left(3 + \sum_{j=1}^{3}|b_j| + |b|\right)^3$$

$$s = a + \sqrt{-1}b \qquad -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

Q.E.D.

<u>lemma 8</u>

$\lambda = (m_1\ m_2\ m_3\ s_1\ s_2\ s_3)$ に対し、

$H(\lambda) \equiv \left(1 + \sum_{j=1}^{3}|m_j|\right)^3 \prod_{j=1}^{3}(3-s_j)^6$

$\Lambda^*(d) \equiv \{\lambda \in \Lambda^* \mid |Re(s_j)| < d \text{ for } j=1\sim 3\} \quad (0 \leqq d < \quad)$

としたとき、$R(P_2\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ can be extended to Λ^* such that

1) for each $f, g \in L_2(V)$

$$\lambda \longrightarrow (R(P_2\lambda)f, g) \quad \text{is analytic in } \Lambda^*$$

2) $\| R(P_2\lambda) \| \leqq K'_d |H(\lambda)| \quad \lambda \in \Lambda^*(d) \quad (0 \leqq d < \quad)$

但し K'_d は d に依存した定数

(証明)

$\lambda = (m_1\ m_2\ m_3\ \sqrt{-1}b_1\ \sqrt{-1}b_2\ \sqrt{-1}b_3) \in \Lambda \quad -\frac{1}{2} < Re(s) < \frac{1}{2}$

$\lambda_s = (m_1\ m_2\ m_3\ \sqrt{-1}b_1\ \sqrt{-1}b_2 + s,\ \sqrt{-1}b_3 - s)$ とする.

$R(P_2\ \lambda_s) = Q(\lambda\ s)$ とおくことによって lemma 7 より $-\frac{1}{2} < Re(s) < \frac{1}{2}$ まで正則に拡張できる.

$\gamma \in W$. s.t. $\gamma\lambda = (m_{k_1}\ m_{k_2}\ m_{k_3}\ ;\ \sqrt{-1}b_{k_1}\ \sqrt{-1}b_{k_2}\ \sqrt{-1}b_{k_3})$

とし. $R(P_2\ \gamma\lambda_s) \equiv R(P_2\ \lambda_s) \quad -\frac{1}{2} < Re(s) < \frac{1}{2}$ とすると.

$$\| R(P_2\ \gamma\lambda_s) \|$$
$$= \| Q(\lambda, s) \|$$
$$\leqq K_a \left(1 + \sum_{j=1}^{3} |m_j| + \sum_{j=1}^{3} |b_j| + |b| \right)^3$$
$$= K_a\ |H(\lambda)|$$
$$= K_a\ |H(\lambda_s)| \qquad (\because\ H(\lambda) \text{ is invariant under permutation})$$

$\Lambda' = \{ \gamma\lambda_s \mid \lambda \in \Lambda \quad \gamma \in W \}$ とおくと. 今までのことから

$$\| R(P_2\ \lambda) \| \leqq K_a\ |H(\lambda)| \qquad \lambda \in \Lambda'$$

が成り立つ.

$f, g \in L^2(V)$ に対し.

$$\Phi(f, g, \lambda) \equiv (R(P, \lambda) f, g) \qquad \lambda \in \Lambda' \qquad \text{とする.}$$

$0 < d < \frac{1}{2}$ とし $\quad K = \sup_{-d<a<d} K_a$ とおくと.

$$|\Phi(f, g, \lambda)| \leqq K_d'\ |H(\lambda)| \|f\|_2 \|g\|_2 \quad \text{for all } \lambda \in \Lambda' \cap \Lambda^*(d)$$

となり.

$$F(\lambda) \equiv \frac{\Phi(f, g, \lambda)}{K_d'\ H(\lambda) \|f\|_2 \|g\|_2} \qquad \lambda \in \Lambda' \cap \Lambda^*(d)$$

$F_{12}(s) \equiv F(m_1\ m_2\ m_3\ \sqrt{-1}b_1+s,\ \sqrt{-1}b_2-s,\ \sqrt{-1}b_3)$

$F_{23}(s) \equiv F(m_1\ m_2\ m_3\ \sqrt{-1}b_1,\ \sqrt{-1}b_2+s,\ \sqrt{-1}b_3-s)$

とおくと. F_{jk} is holomorphic in $-d < \mathrm{Re}(s) < d$. and bounded by 1.

従って F has a holomorphic extention to $\Lambda^*(d)$ and bounded by 1

$\Lambda^* = \bigcup_{0 \le d < \frac{1}{2}} \Lambda^*(d)$ より.

$F(f, g, \lambda)$ has a holomorphic extention to Λ^* and b.d. by 1.

$\therefore$ $\Phi(f, g, \lambda)$ has holomorphic extention to Λ^* and.

$$|\Phi(f, g, \lambda)| \leq K_d' |H(\lambda)| \|f\|_2 \|g\|_2 \quad \text{for all } \lambda \in \Lambda^*(d). \quad 0 \leq d < \tfrac{1}{2}$$

$\lambda \in \Lambda^*$ を固定したとき.

$$\begin{array}{ccc} (f, g) & \longrightarrow & \Phi(f, g, \lambda) \\ \cap & & \cap \\ L^2(V) \times L^2(V) & & \mathbb{C} \end{array}$$

は. sesqui-linear form.

よって $R(P_2, \lambda)$ が. Λ^* 上 定義でき. lemma の 主張が. 言える.

q. e. d.

<u>Theorem 2</u> $G = SL(3\ \mathbb{R})$ $C = MA$ において.

1). $g \in G$ fix.

the operator valued function.

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \longrightarrow & R(g, \lambda) \\ \cap & & \\ \Lambda & & \end{array}$$

は. 正則に Λ^* まで. 拡張できる。

2). $\forall \lambda \in \Lambda^+$ に対して.

$$G \ni g \longrightarrow R(g\,\lambda)$$

は. continuous uniformly bounded representation of G.

3) $R(g, P\lambda) = R(g, \lambda)$ for all $g \in G$ $\lambda \in \Lambda^+$ $P \in W$.

4) $R(g\,\lambda') = R(g\,\lambda)'$ for all $\lambda \in \Lambda^+$ $g \in G$.

但し. $'$ は contragradient 表現

(証明)

$\lambda = (m_1\ m_2\ m_3\ \ s_1\ s_2\ s_3) \in \Lambda^+$ とする.

$g \in G_0$ のとき.

$$R(g, \lambda) \equiv R(g\ \ \mathrm{res}\lambda)$$

$g \in G - G_0$ のとき.

$g = g_0 P_2 g_0'$ $\quad g_0, g_0' \in G_0$ と表わせることより.

$$R(g, \lambda) \equiv R(g_0\ \lambda) R(P_2\ \lambda) R(g_0'\ \lambda)$$

とおくと. $R(g, \lambda)$ は well-defined で. 求めるもの.

q.e.d.

<u>Corollary</u>

3). 4) より. $\lambda \in \Lambda^+$ に対し.

$\exists\, P \in W.$ s.t. $P\lambda = \lambda'$ ($'$ は contragradient)

$\Longrightarrow$.

$R(\cdot\ \lambda)$ は unitary representation of G.

◦ Corollary で与えられた unitary op. は、補系列になると予想しているが、今のところまだ証明はできていない。

References

[1] Kunze R. A. and Stein E. M. : Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group. Amer. J. Math. 82 (1960) 1-62.

[2] ———. Uniformly bounded representations II. Analytic continuation of the principal series of representations of the n×n complex unimodular group. Amer. J. Math 83 (1961) 723-786.

[3] ———. Uniformly bounded representations III. Intertwining operators for the principal series on semisimple groups. Amer. J. Math. 89 (1967) 385-442.

[4] ———. Uniformly bounded representation IV Analytic continuation of the principal series for complex classical groups of types. B_n, C_n, D_n. Advances in Mathematics 11 (1973) 1-71.

[5]. Lipsman. R. L. : Uniformly bounded representations of SL(2 C) Amer. J. Math. 91 (1969) 47-66.

[6] ________ . Uniformly bounded representations of the Lorentz groups. Amer. J. Math 91 (1969) 938-962

[7] Sally P. J. : Analytic continuation of the irreducible unitary representations of the universal covering group of SL(2 IR) Mem. Amer Math Soc NO. 69 (1967)

[8] Wilson. E. N. : Uniformly bounded representations for the Lorentz groups. Trans. Amer. Math. Soc. 166 (1972) 431-438

[9] Bamazi. L. Représentations uniformément sphériques bornées des groupes de Lorentz. Université de Nancy. I. (1974)

[10] Oscar. B. A. On uniformly bounded representations of the Lorentz groups. Washington Univ. (1982)

[11] Stanke. R. J. Analytic uniformly bounded representations of SU(1, n+1). Trans. of. A.M.S. 290 (1985)

[12] Gelfand I. M. and Naimark M. A. Unitäre Darstellungen der Klassischen Gruppen. Akademie-Verlag Berlin 1957.

[13] Wallach. N.R. Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces. Marcel Dekker. New York 1973

[14] Knapp. A. W. Representation Theory of Semisimple Groups An Overview Based on Examples. Princeton Univ. Princeton New Jersey 1986.